

Totale Ableitung

272⁹

(auf V.R. mit $\dim < \infty$)

Wozu?

1.) partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

für $f = f(x_1, \dots, x_n)$ sind

- zu schwach:

im allg. muss f nicht einmal stetig sein, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1, \dots, n$, existieren

- Koordinatenabhängig:

betrachte auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten, ersetze also $f(x_1, x_2)$ durch $\tilde{f}(r, \vartheta) = f(re^{i\vartheta})$

unklar: f von $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow$

f von $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \vartheta}$

2.) ein koordinatenunabhängiger Differenzierbar-
keitsbegriff ist erstrebenswert! Bspl:

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \ni A \mapsto \det A \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^{n \times n} :=$
V.R. der
 $n \times n$ Matrizen
über $\mathbb{R}$

- Welches Koordinatensystem
wählt man auf $\mathbb{R}^{n \times n}$?
- Eine Formel für $\det A$ in Koordinaten
ist unübersichtlich.

Deshalb ab jetzt

// koordinatenfreie
Formulierung //

Totale Differenzierbarkeit

-272-

- $X, Y, Z, \dots$ sind stets $\mathbb{R}$ -Vektorräume mit $\dim < \infty$
- auf den Räumen sind irgendwelche Normen gegeben; die genaue Wahl spielt wegen $\dim < \infty$ keine Rolle ("Äquivalenz aller Normen")
- Grenzwertkonzept (Erinnerung):
für Funktionen
$$f: X \supset B_{\mathbb{R}}(a) - \{a\} \longrightarrow Y$$

(analog zu " $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ")

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: b \text{ existiert}$$

-273-

$\Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n) \subset X$, $x_n \neq a$,
mit $x_n \rightarrow a$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta$$

Def 18.4 (Ableitung)

Seien X, Y wie vorher, $U \subset X$
offen und $a \in U$. $f: U \rightarrow Y$

heißt in a total diff'bar : $\Leftrightarrow$

es gibt eine lineare Abbildung

$L: X \rightarrow Y$ mit

$$(*) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|x-a|} (\varphi(x) - L(x-a) - \varphi(a)) = \\ \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{|v|} (\varphi(a+v) - L(v) - \varphi(a)) = 0 \end{cases}$$

Man schreibt für L :

$\varphi'(a), D\varphi(a), \dots$

Bem: $\odot$ $\varphi'(a)$ bezeichnet also

(a fest!) eine lineare Abbildung

$X \rightarrow Y$. Für $v \in X$ ist ~~das~~

$\varphi'(a)(v) \in Y$.

① Interpretation im Fall $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^n$
 („Kurven“)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diff'bar in a , d.h.:

$$\frac{d}{dt}|_a \varphi := \lim_{t \rightarrow a} \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{t - a} =: \underline{\underline{\gamma}}$$

existiert in $\mathbb{R}^n$. Das war ja die „alte“

Definition der Ableitung. Man definiert:

$$\begin{cases} L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ linear,} \\ L(t) := t \underline{\underline{\gamma}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ mit diesem L gilt $\otimes$ aus 18.4

Umgekehrt: Hat man eine lineare

Abbildung $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

(*) , so folgt:

$$\mathbb{R}^n \ni L(1) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a})$$

d.h. f ist im Sinne von Analysis 1
diff'bar in a mit $\frac{df}{dt}(a) = L(1)$.

Identifikation: $\frac{df}{dt}(a) \triangleq Df(a)$

② Identifikation für $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$

Sei $f: \mathbb{R}^n \supset U \xrightarrow{\text{(offen)}} \mathbb{R}$ diff'bar.

in $a \in U$, $L: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{linear}} \mathbb{R}$ sei

die Ableitung. Dann gibt es

genau einen Vektor $l \in \mathbb{R}^n$ mit

$$L(v) = v \cdot l \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Umgekehrt: Ist $c \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{|v|} (f(a+v) - c \cdot v - f(a)) = 0,$$

so ist f in a diff'bar mit

$$Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad Df(a)(w) = c \cdot w$$

③ äquivalent zur Differenzierbarkeit ist:
 (Restglieddarstellung)
 es gibt eine lineare Abbildung $L: X \rightarrow Y$
 und eine in $\overset{\text{in } a}{\underbrace{a}}$ stetige Abbildung $R: U \rightarrow Y$
 mit $R(a) = 0$ und

$$\| f(x) = f(a) + L(x-a) + |x-a| R(x), \\ x \in U.$$

Es gilt nun der Zusammenhang
 // Differenzierbarkeit $\implies$ Stetigkeit,

genauer:

Satz 18.2: Sei $U \subset X$ offen, $a \in U$

und $f: U \rightarrow Y$ sei differenzierbar

in a . Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$
 ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(a)| \leq (\|f'(a)\| + \varepsilon) |x - a|$$

für alle $x \in B_\delta(a) \cap U$, speziell

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

so dass f stetig in a ist.

Erinnerung:

Operatornorm $\|f'(a)\| := \sup_{|v| \leq 1} |f'(a)(v)|$

(vgl. dir auf X, Y gewählten Normen).

Beweis von 18.2: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{1}{|x-a|} |f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| < \varepsilon$$

für alle $x \in U$, $0 < |x-a| < \delta$

(vgl. $\circledast$ in Def. 18.4) $\implies$

$$|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)| \leq \varepsilon |x-a|$$

$$\forall |x-a| < \delta, x \in U.$$

Nun ist

$$|f(x) - f(a)| = \\ |f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) + f'(a)(x-a)| \leq$$

$$\varepsilon |x-a| + |f'(a)(x-a)| \leq$$

$$(\varepsilon + \|f'(a)\|) |x-a|$$

für alle $x \in U$, $|x-a| \leq \delta$.



Weshalb nimmt man Def. 18.4

nicht einfach $X = \mathbb{R}^n$ und

$Y = \mathbb{R}^M$ mit $n, M \geq 1$?

Wozu dient also überhaupt die
abstrakte Formulierung?

Beispiel :

$X := Y :=$ Raum aller linearen
Abbildungen $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$\varphi : X \rightarrow X, \quad \varphi(A) := A \circ A$$

"Lineare Algebra" $\implies \dim X = k^2 < \infty$;

Wähle irgendeine Norm auf X ;

dann können wir fragen: Ist

φ an einer beliebigen Stelle $A \in X$

differenzierbar?

Hätten wir nur eine Differenzierbarkeitsdefinition für Abbildungen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

so müssten wir uns mit
 $n := M := k^2$

für eine Isomorphie

$$\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

entschieden und statt φ die

Abbildung

$$\Phi \circ \varphi \circ \Phi^{-1}$$

an der Stelle $\Phi^{-1}(A)$ auf

Diff'barkeit untersuchen, wobei dann
 die Frage auftaucht, ob die Antwort

ggf. vom gewählten Φ abhängt!

Diese Probleme haben wir bei unserer
 Def. nicht.

Nun zur Differenzierbarkeit: für alle
 $H \in X$ gilt

$$\varphi(A+H) - \varphi(A) = (A+H) \circ (A+H) - A \circ A =$$

$$A \circ A + H \circ A + A \circ H + H \circ H - A \circ A =$$

$$A \circ H + H \circ A + H \circ H \implies$$

$$\frac{1}{|H|} \left| \varphi(A+H) - \varphi(A) - [A \circ H + H \circ A] \right|$$

$$\leq \frac{|H \circ H|}{|H|}$$

Die Operatornorm $\|H\|$ erfüllt

$$\|H \circ H\| \leq \|H\|^2,$$

und da unsere Norm $|\cdot|$ zu $\|\cdot\|$
äquivalent ist, folgt mit $c > 0$

$$|H \circ H| \leq c |H|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|H|} |\varphi(A+H) - \varphi(A) - L(H)| \rightarrow 0, \quad H \rightarrow 0,$$

coobi $L: X \rightarrow X$, $L(H) := A \circ H + H \circ A$,

linear ist. Also:

$$\boxed{\varphi'(A) = L}$$



Weitere Beispiele bekommen wir leichter,
wenn wir zunächst Kriterien ^{später} und
für Diff'barkeit

Rechenregeln für $\varphi'(a)$ formulieren.